

Теорема об угле, вписанном в окружность. Следствия

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется **вписанным углом**.

На рисунке 1 $\angle ABC$ вписанный, $\cup AC$ расположена внутри этого угла. В таком случае говорят, что вписанный $\angle ABC$ опирается на $\cup AC$.

Теорема. Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую опирается.

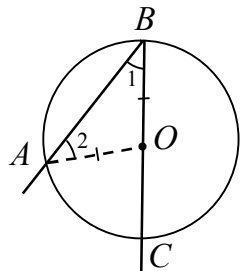


Рис. 1

Дано: $\angle ABC$ – вписанный угол, опирающийся на $\cup AC$.

Доказать: $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$.

Доказательство

Рассмотрим три возможных случая расположения луча BO относительно $\angle ABC$.

I случай

Луч BO совпадает с одной из сторон $\angle ABC$, например со стороной BC (рис. 1). В этом случае $\cup AC$ меньше полуокружности, поэтому $\angle AOC = \cup AC$. $\angle AOC$ – внешний угол $\triangle AOB$ при вершине O , поэтому он равен сумме двух внутренних углов треугольника, не смежных с ним, т.е. $\angle AOC = \angle 1 + \angle 2$. Но $\triangle AOB$ – равнобедренный, т.к. $OA = OB$, как радиусы, значит, $\angle 1 = \angle 2$, как углы при основании равнобедренного треугольника. Следовательно, $\angle AOC = \angle 1 + \angle 2 = 2\angle 1 = 2\angle ABC$, отсюда $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC$. А т.к. $\angle AOC = \cup AC$, то $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$.

II случай

Луч BO делит $\angle ABC$ на два угла (рис. 2).

В этом случае луч BO , пересекает $\cup AC$ в некоторой точке D , которая разделяет $\cup AC$ на две дуги: $\cup AD$ и $\cup DC$, а $\angle ABC$ на

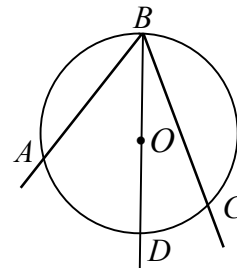


Рис. 2

два угла: $\angle ABD$ и $\angle DBC$. По доказанному выше, $\angle ABD = \frac{1}{2} \cup AD$, $\angle DBC = \frac{1}{2} \cup DC$.

$$\begin{aligned} \text{Значит, } \angle ABC &= \angle ABD + \angle DBC = \\ &= \frac{1}{2} \cup AD + \frac{1}{2} \cup DC = \frac{1}{2} (\cup AD + \cup DC) = \\ &= \frac{1}{2} \cup AC, \text{ т.е. } \angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC. \end{aligned}$$

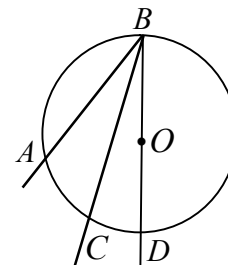


Рис. 3

III случай

Луч BO не делит $\angle ABC$ на два угла и не совпадает со сторонами этого угла (рис. 3).

В этом случае $\cup AC = \cup AD - \cup CD$.

$$\begin{aligned} \angle ABC &= \angle ABD - \angle CBD = \\ &= \frac{1}{2} \cup AD - \frac{1}{2} \cup CD = \frac{1}{2} (\cup AD - \cup CD) = \\ &= \frac{1}{2} \cup AC, \text{ т.е. } \angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC. \end{aligned}$$

Итак, вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую опирается. **Ч.т.д.**

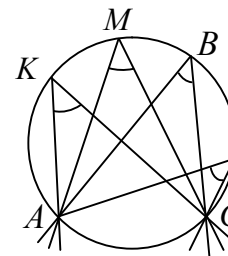


Рис. 4

Следствие 1

Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

$\angle AKC = \angle AMC = \angle ABC = \dots$, так как они опираются на одну и ту же $\cup AC$ (рис. 4).

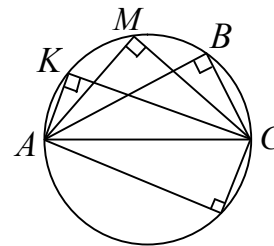


Рис. 5

Следствие 2

Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, – прямой.

$\angle AKC = \angle AMC = \angle ABC = \dots 90^\circ$, так как они опираются на диаметр AB (рис. 5).

Замечание. Так как градусная мера дуги равна градусной мере соответствующего центрального угла, то теорему о вписанном угле можно сформулировать следующим образом: угол, вписанный в окружность, равен половине соответствующего центрального угла, т.е.

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC .$$